CAPES externe 1982 (2e composition)

CORRIGÉ

QUESTIONS PRELIMINAIRES

0.1. Soit f une expansion de $(\mathcal{A}, d)$. $f(M) = f(M') \Rightarrow 0 \leq d(M,M') \leq d(f(M), f(M')) = 0 \Rightarrow d(M,M') = 0 \Rightarrow M = M'$. Une expansion de $(\mathcal{A}, d)$ est donc une application injective.

0.2. $\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d) \\ g \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $f o g$ est une application de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$.

De plus : $d(fog(M), fog(M')) = d(f[g(M)], f[g(M')])$,
or $d(f[g(M)], f[g(M')]) \geq d(g(M), g(M'))$ car $f \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d)$
et $g(M) \in \mathcal{A}$, $g(M') \in \mathcal{A}$ et $d(g(M), g(M')) \geq d(M,M')$ car $g \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d)$,
d'où $d(fog\ (M), fog\ (M')) \geq d(M,M')$ et $fog \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d)$.

0.3. $f \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d)$ et f est bijective.

. f isométrie de $(\mathcal{A}, d) \Rightarrow d(f(M), f(M')) = d(M,M') \Rightarrow f^{-1}$ existe car f est bijective, f^{-1} est une application de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ vérifiant $d(f^{-1}(M), f^{-1}(M')) = d(M,M')$, (car f bijection de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ et f isométrie donc f^{-1} isométrie) et $f^{-1} \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d)$.

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1} \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d) \\ f \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d(M,M') \leq d(f(M), f(M')) \\ d(f^{-1}[f(M)], f^{-1}[f(M')]) \geq d(f(M),f(M')) \end{array}$$

$\Rightarrow \forall (M,M') \in \mathcal{A}^2 \; d(f(M), f(M')) = d(M,M')$ donc f est une isométrie.

PREMIERE PARTIE

1.1. a.

A —— M —— f(M) —— B

$d(A,B) \leq d(f(A),f(B))$ or $f(A) \in [A,B], f(B) \in [A,B]$

$\Rightarrow d(A,B) \geq d(f(A),f(B))$ donc $d(A,B) = d(f(A),f(B))$

$\Rightarrow \{f(A),f(B)\} = \{A,B\}$.

1.1. b. Une expansion étant injective on sait que $f(A)$ et $f(B)$ sont distincts.

Deux cas se présentent :

$(f_1(A) = A \;,\; f_1(B) = B)$ ou $(f_2(A) = B \;,\; f_2(B) = A)$.

Soit s la symétrie point par rapport au milieu de $[A,B]$. $s o f_2$ est une expansion de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ car toute isométrie de $(\mathcal{A}, d)$ appartient à $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d)$ et $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d)$ est stable par composition.

On a alors $s o f_2\,(A) = A \quad , \quad s o f_2\,(B) = B$

Déterminons les expansions de $(\mathcal{A}, d)$ telles que : $f(A) = A \;,\; f(B) = B$

Soit M un point de $[A,B]$ et $f(M)$ son image.

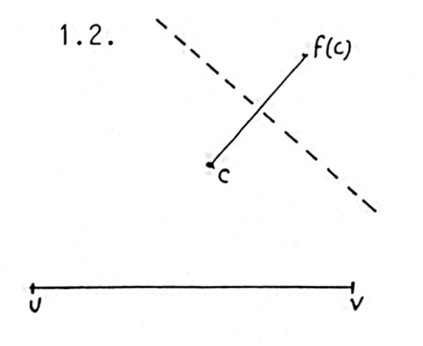
Soit $a = d(A,B) \;,\; x = d(A,M) \;,\; x' = d(A,f(M))$.

$d(M,B) = a - x \;,\; d(f(M),B) = a - x'$.

$$\left.\begin{array}{ll} d(f(M),A) \geq d(A,M) & \Rightarrow x' \geq x \\ d(f(M),B) \geq d(M,B) & \Rightarrow a - x' \geq a - x \Rightarrow x' \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow x = x' \Rightarrow f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}.$$

1.1. c. On voit donc que $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d) \subset \{\mathrm{Id}\,\mathcal{A}, s\}$; or $\mathrm{Id}\,\mathcal{A}$ et s sont des expansions de $(\mathcal{A}, d)$ d'où $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}, d) = \{\mathrm{Id}\,\mathcal{A}, s\}$.

1.2.



$d(U,C) \leq d(U,f(C)) \;,\; d(V,C) \leq d(V,f(C))$

$\Rightarrow \forall \lambda \in [0,1] \cap \mathbb{R},\; d(\lambda U + (1-\lambda) V, C)$

$\leq \lambda\, d(U,C) + (1-\lambda)\, d(V,C)$

$\leq \lambda\, d(U, f(C)) + (1-\lambda)\, d(V, f(C))$

$\leq d(\lambda U, f(C)) + d((1-\lambda) V, f(C))$

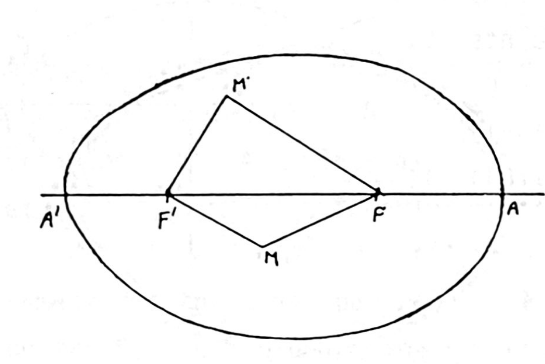
$\leq d(\lambda U + (1-\lambda) V, f(C))$.

tout ceci car d est la distance associée à un produit scalaire.

($d(\lambda U,C) = \|\overrightarrow{C - \lambda U}\|$) qui vérifie $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ et car λ et $1 - \lambda$ sont des réels positifs).

On voit donc que tout point de $[U,V]$ vérifie $d(M,C) \leq d(M,f(C))$ or ceci est la définition du demi-plan fermé contenant C et bordé par la médiatrice du segment $[C,f(C)]$

1.3. a.



On peut supposer $d(M',F) \geq d(M,F')$ en supposant que des quatre distances $d(M,F)$, $d(M,F')$, $d(M',F)$, $d(M',F')$ alors $d(M',F)$ est la plus grande.

Soit M et M' deux points de $\mathscr{A}$; on a alors

$d(M,M') \leq d(M,F') + d(F',M') \leq d(M',F) + d(M',F') \leq 2a$

$d(M,M') = 2a \Rightarrow d(M',F) + d(M',F') = 2a \Rightarrow M' \in (E)$

$d(M,M') = 2a \Rightarrow d(M',F) = d(M,F') \Rightarrow d(M,M') = 2a \leq d(M,F) + d(F,M')$

$= d(M,F) + d(M,F') \leq 2a \Rightarrow d(M,F) + d(M,F') = 2a \Rightarrow M \in (E)$.

De plus : $d(M,F') = d(M',F)$ et $d(M,F) + d(M,F') = 2a \Rightarrow d(M,F) + d(M',F) =$ $2a = d(M,M')$ donc M, M', F sont alignés. De même M, M', F' sont alignés donc M, M', F, F' sont alignés et $\{M,M'\} = \{A,A'\}$ car M et M' appartiennent à (E) .

1.3. b. $f \in Exp(\mathscr{A}, d)$, $f(A) = A$, $f(A') = A'$. Soit C un point de (E) tel que $f(C) \neq C$. En utilisant 1.2. on sait que $[A, A']$ est contenu dans le demi-plan fermé contenant C et bordé par la médiatrice de $[C, f(C)]$. F et F' sont des points de $[A, A']$. On a donc

$d(f(C),F) \geq d(C,F)$ et $d(f(C),F') \geq d(C,F')$

$d(f(C), F) + d(f(C),F') \geq d(C,F) + d(C,F') = 2a$

or $f(C)$ appartient à $\mathscr{A}$ c'est-à-dire

$d(f(C),F) + d(f(C),F') \leq 2a$ d'où $d(f(C),F) + d(f(C),F') = 2a$ et $f(C)$ appartient à (E)

et dans les deux inégalités $d(f(C), F) \geq d(C,F)$ et $d(f(C), F') \geq d(C,F')$ on a égalité. F et F' appartiennent alors à la médiatrice de $[C,f(C)]$ et C et $f(C)$ sont symétriques l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe AA'.

1.3. c. $f \in Exp(\mathcal{A}, d)$ $f(A) = A$, $f(A') = A'$, $f(B) = B$, $f(B') = B'$.

Par 1.3. b. on sait que si C est un point de (E) l'image $f(C)$ de C est soit C soit le symétrique orthogonal de C par rapport à la droite AA'. Dans le second cas appliquons 1.2. dans le cas $U = B$, $V = B'$, la médiatrice de $[C, f(C)]$ est la droite AA' , B et B' ne sont pas dans le même demi-plan fermé déterminé par cette médiatrice. Nous avons donc montré :

$$\forall\, C \in (E) \quad f(C) = C .$$

Soit M un point de $\mathcal{A} - (E)$ tel que $f(M) \neq M$. La droite $Mf(M)$ coupe (E) en deux points C_1 et C_2 tels que $f(C_1) = C_1$ et $f(C_2) = C_2$. Or ils ne sont pas situés dans le même demi-plan fermé délimité par la médiatrice de $[M,f(M)]$. Il y a donc contradiction.

$$\forall\, M \in \mathcal{A} \quad f(M) = M .$$

1.3. d. Si u est une isométrie de $(\mathcal{A}, d)$ alors :

$\forall\, f \in Exp(\mathcal{A}, d)$ $u \circ f \in Exp(\mathcal{A}, d)$ (question 0.2)

Soit f un élément de $Exp(\mathcal{A}, d)$. Par 1.3. a. $d(f(A),f(A')) \geq d(A,A') = 2a$ $\Rightarrow \{f(A), f(A')\} = \{A,A'\}$. Si $f(A) = A'$, $f(A') = A$ alors $s \circ f$ avec s symétrie orthogonale par rapport à BB' vérifie :

$s \circ f(A) = A$, $s \circ f(A') = A'$, $s \circ f \in Exp(\mathcal{A}, d)$;

donc si $G_1 = \{f \in Exp(\mathcal{A}, d),\ f(A) = A,\ f(A') = A'\}$,

$Exp(\mathcal{A}, d) = G_1 \cup sG_1$, $sG_1 = \{s \circ f,\ f \in G_1\}$. Déterminons G_1 . Soit f appartenant à G_1 . B et B' sont tels que $f(B) = B$ ou $f(B) = B'$ (conséquence de 1.3.b. dans le cas où $B = C$). De même $f(B') = B'$ ou $f(B') = B$.

* $f \in G_1$, $f(B) = B$, $f(B') = B'$ alors $f = Id_{\mathcal{A}}$ par 1.3.c.

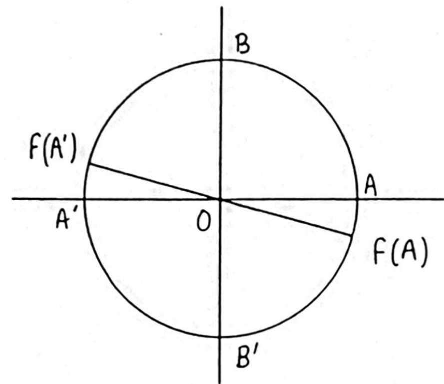
* $f \in G_1$, $f(B) = B'$, $f(B') = B$ alors si s' désigne la symétrie orthogonale par rapport à AA', $s' \circ$ vérifie : $s' \circ f(B) = B$, $s' \circ f(B') = B'$; donc $s' \circ f$ vaut l'identité de $\mathcal{A}$ et f coïncide avec s' ($s'^2 = Id_{\mathcal{A}}$).

Nous avons donc montré : $G_1 = \{Id_{\mathcal{A}}, s'\}$; $\boxed{G = \{Id_{\mathcal{A}}, s', s, s's\}}$

où s' est la symétrie orthogonale par rapport au grand axe de (E), s est la symétrie orthogonale par rapport au petit axe de (E), $s's = ss'$ est la symétrie par rapport au centre de (E).

1.4. Remarquons que : $(M,M') \in \mathcal{A}^2 \Rightarrow d(M,M') \leq d(M,O) + d(O,M') \leq 2R$, si R désigne le rayon du cercle de centre (O) bordant $\mathcal{A}$; et $d(M,M') = 2R \Rightarrow$ $d(M,O) = d(O,M') = R$ et O, M, M' alignés et distincts c'est-à-dire M et M' diamétralement opposés.

Soient A et A' les extrémités d'un diamètre alors f(A) et f(A') sont deux points diamétralement opposés du cercle et distincts ($f \in Exp(\mathscr{A}, d) \Rightarrow f$ bijective et $d(f(A),f(A')) \geq d(A,A')$). Soit r la rotation de centre 0 telle que $r(f(A)) = A$. Alors $r(f(A')) = A'$ et de plus $r o f \in Exp(\mathscr{A}, d)$. Nous sommes ramenés au cas où $f(A) = A$, $f(A') = A'$. Soit C un point du cercle tel que $f(C) \neq C$ alors le



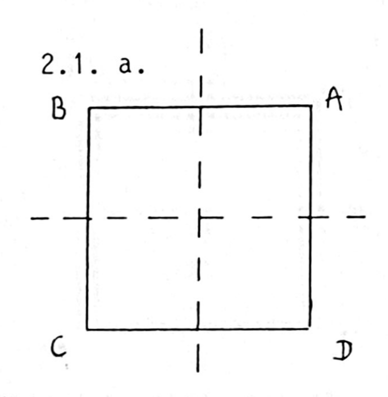
même raisonnement qu'en 1.3.b. montre que f(C) est le symétrique de C par la symétrie orthogonale d'axe AA'. Soit BB' le diamètre du cercle orthogonal à AA'. On a alors $f(B) = B$ et $f(B') = B'$, ou $f(B) = B'$ et $f(B') = B$. On en conclut comme en 1.3.d. et 1.3.c. que

$G_1 = \{f \in Exp(\mathscr{A}, d), f(A) = A, f(A') = A'\} = \{Id_{\mathscr{A}}, s\}$, où s est la symétrie orthogonale par rapport à AA' donc $G \subset \{r, so\,r, r$ rotations de centre $0\}$. L'inclusion inverse est triviale et en remarquant que l'ensemble $\{so\,r, r$ rotations de centre $0\}$ coïncide avec l'ensemble des symétries orthogonales d'axe contenant 0 on obtient :

G = {rotations de centre 0} U {symétries orthogonales d'axe contenant 0}.

DEUXIEME PARTIE

2.1. a.



Remarquons que deux points de Γ, M et M', sont sur deux côtés distincts et parallèles du carré A B C D si et seulement si $\delta(M,M')=2$.

$g \in \mathfrak{J}(\Gamma, \delta) \Rightarrow \delta(g(M), g(M')) = \delta(M,M') = 2$

$\Rightarrow$ g(M) et g(M') sont situés sur deux côtés distincts et parallèles du carré A B C D.

Démontrons notre remarque :

. $\forall (M,M') \in \Gamma^2 \quad \delta(M,M') \leq \delta(M,0) + \delta(0,M) \leq 1 + 1 \leq 2$

. Réciproquement : $\delta(M,M') = 2$ avec $(M,M') \in \Gamma^2 \Rightarrow \delta(M,0) = \delta(0,M') = 1$

$\Rightarrow$ M et M' appartiennent aux segments du quadrilatère A, B, C, D.

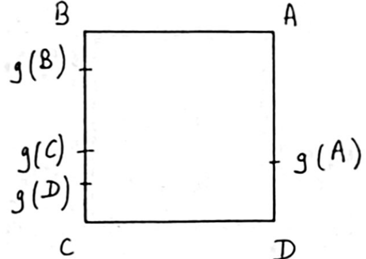
$\delta(M,M') = 2 \Rightarrow$ par exemple $|x - x'| = 2$ or $|x| \leq 1$, $|x'| \leq 1$ d'où

$2 = |x - x'| \leq |x| + |x'| \leq 2$ donc $|x| = |x'| = 1$ et $|x - x'| = 2$ et

$x = \varepsilon x' = \varepsilon' 1 \quad (\varepsilon, \varepsilon') \in \{+1, -1\}^2$.

Considérons A et montrons que son image par un élément g de $\mathfrak{J}(\Gamma, \delta)$ appartient à {A, B, C, D}. A et B constituent une paire de points situés sur deux segments distincts et parallèles du quadrilatère A, B, C, D. Il en est de même de A et D, les deux segments considérés alors étant les deux autres segments du quadrilatère A, B, C, D ; il en est de même de A et C.

La première partie de cette question nous permet d'affirmer que les images $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$, $g(D)$ des points A, B, C, D par g appartiennent aux côtés du quadrilatère A, B, C, D. Si $g(A)$ n'est pas un sommet alors $g(B)$, $g(C)$, $g(D)$ appartiennent nécessairement au côté opposé à celui auquel appartient $g(A)$: ce sont trois points distincts de ce côté (g bijective) or sur ce côté il n'y a que deux points à distance 2 l'un de l'autre, les deux sommets car $\delta(g(B), g(C)) = \delta(B,C) = 2$, $\delta(g(C), g(D)) = \delta(C,D) = 2$. Nous avons donc montré que $g(A)$ est un sommet. De la même façon on montre que $g(B)$, $g(C)$, $g(D)$ sont des sommets.



2.1. b. $g(A) = A \Rightarrow g(C) \in \{B, C, D\}$ par la question précédente et le fait que g est bijective. Supposons $g(C) = B$.
$\{M \in \Gamma,\ \delta(M,A) = \delta(M,C) = 1\} = \{0\}$
car $\{M \in \Gamma,\ \delta(M,A) = 1 = [0,I] \cup [0,J]$
avec $I(1,0)$ et $J(0,1)$ $\{M \in \Gamma,\ \delta(M,A) = \delta(M,B) = 1\} = [0,J]$. g étant bijective et isométrique on devrait avoir si $g(C) = B$:

$\{M \in \Gamma,\ \delta(M,A) = \delta(M,C) = I\} = \{M \in \Gamma,\ \delta(M,A) = \delta(M,B) = 1\}$ ce qui n'est pas.
On a donc $g(C) \neq B$; de même $g(C) \neq D$ donc $g(C) = C$.

2.1. c. On sait que G est constitué de l'ensemble des rotations de centre 0 et d'angles respectifs $\pi/2$, π, $3\pi/2$ et de l'ensemble des symétries par rapport aux droites OI, OJ, AC, BD et de l'identité. Il suffit de remarquer que $\forall f \in G \quad f/\Gamma \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta)$.

2.1. d. Soit g appartenant à $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$.
Si $g(A) \neq A$, soit la rotation r de centre 0 telle que $r(A) = g(A)$; r appartient à G et par les questions 0.2 et 0.3 et 2.1. c. $r^{-1} og$ appartient à $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$ et vérifie $r^{-1} og(A) = A$ et donc $r^{-1} og(C) = C$ par 2.1. b. On a alors $\{r^{-1} og(B), r^{-1} og(D)\} = \{B, D\}$. Si $r^{-1} og(B) \neq B$ alors considérons la symétrie s par rapport à AC . $so\, r^{-1} og$ vérifie :

$$\begin{cases} so\, r^{-1} og \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta) \quad \text{avec } so\, r^{-1} \in G \\ so\, r^{-1} og \text{ laisse fixes } A, B, C, D. \end{cases}$$

Si $r^{-1} og(B) = B$ alors $f = r^{-1}$.

$\forall g \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta)\ \exists f \in G \quad fog \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta)$ et fog laisse fixes A,B,C,D.

2.1. e. $g \in \mathcal{I}(\Gamma, \delta)$, $g(A) = A$; $g(B) = B$; $g(C) = C$; $g(D) = D$.
Soit $M \in [A,B]$, alors $g(M)$ appartient à $[A,B]$ car

$$\delta(g(M),C) = \delta(M,C) = 2 \quad , \quad \delta(g(M),D) = \delta(M,D) = 2 .$$

Puis $\delta(g(M),A) = \delta(M,A)$, $\delta(g(M),B) = \delta(M,B)$, c'est-à-dire : $1 - x_M = 1 - x_{g(M)}$ d'où $x_M = x_{g(M)}$. On voit donc que $g_{/[A,B]} = Id_{[A,B]}$.
Il en est de même pour les restrictions de g aux autres côtés du quadrilatère A, B, C, D.
Soit M un point de Γ tel que $x_M \geq 0$ et $y_M \geq 0$. Alors $g(M)$ vérifie :

$$\forall P \in [C,D] \; \delta(g(M),P) = \delta(M,P) \geq 1 + y = \delta(M,[C,D])$$

car $\delta(M,[C,D]) = \inf\limits_{-1 \leq a \leq 1} (\sup (1+y, |x-a|))$,

d'où $\delta(g(M),[C,D]) = \delta(M,[C,D]) = 1+y = 1+y'$, si $g(M)$ a pour coordonnées (x', y').
Donc $y = y'$. En considérant $[A,D]$ on obtient $x = x'$.

2.1. f. On a vu que : $\forall g \in \mathcal{I}(\Gamma,\delta) \; \exists f \in G \quad f \circ g \in \mathcal{I}(\Gamma,\delta) \quad f \circ g = Id_\Gamma$ (par 2.1.e)
On a donc $\forall g \in \mathcal{I}(\Gamma,\delta) \; \exists f \in G \quad g = f^{-1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{I}(\Gamma, \delta) \subset G \\ G \subset \mathcal{I}(\Gamma, \delta) \end{array}\right\} \Rightarrow G = \mathcal{I}(\Gamma, \delta) .$$

2.2. a. $G \subset \{f \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta) / f(0) = 0\}$ par 2.1. c.
En fait $\forall f \in G \quad \forall (M,M') \in \mathcal{E}^2 \quad \delta(f(M), f(M')) = \delta(M,M')$
Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$, $f(0) = 0$; alors : $\forall M \in \Gamma \quad \delta(f(M),0) = \delta(M,0) \leq 1$
$\Rightarrow f(\Gamma) \subset \Gamma \Rightarrow f_{/\Gamma} \in \mathcal{I}(\Gamma,\delta)$ car f est bijective $(f^{-1} \in \mathcal{I}(\mathcal{E},\delta), f^{-1}(0) = 0)$.
Par 2.1. f. on a donc : f appartient à G.

2.2. b. Soit un élément f de $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$. Considérons la translation t de vecteur $\overrightarrow{f(0)0}$. t est un élément de $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$ et on a :

$$t \circ f \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta) , \quad t \circ f(0) = 0 \Rightarrow t \circ f \in G \Rightarrow f \in t^{-1} G .$$

Un élément de $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$ est soit un élément de G soit le composé d'une translation et d'un élément de G. En utilisant les décompositions d'une translation en produit de symétries par rapport à deux droites parallèles, l'une d'entre elles étant donnée de façon arbitraire on en conclut que les éléments de $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$ sont :

- les symétries par rapport aux droites parallèles à l'une des quatre droites suivantes : $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$, $x - y = 0$
- les rotations d'angle $k\,\pi/2$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ de centre quelconque
- les translations.

2.3. a. σ est une application affine bijective dont l'application linéaire associée a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant 2 non nul ;

$d_1(M,M') = |x-x'| + |y-y'|$, $\delta(\sigma(M),\sigma(M')) = \mathrm{Sup}(|x+y-x'-y'|,|-x+x'+y-y'|)$

$= \mathrm{Sup}(|(x-x')+(y-y')|, |-(x-x')+(y-y')|)$

or $|a| + |b| = \mathrm{Sup}(|a+b|, |a-b|)$ d'où l'égalité demandée.

2.3. d. $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta) \overset{?}{\Rightarrow} \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, d_1)$.

$\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma$ est une bijection.

$d_1(\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma(M), \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma(M')) = \delta(\sigma(\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma(M)), \sigma(\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma(M')))$

$= \delta(f \circ \sigma(M), f \circ \sigma(M')) = \delta(\sigma(M), \sigma(M')) = d_1(M,M')$ en utilisant 2.3. a. et f élement de $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$. σ^* est donc bien défini.

σ^* est un homomorphisme de groupes

$\sigma^*(f \circ g) = \sigma^{-1} \circ f \circ g \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ g \circ \sigma = \sigma^*(f) \circ \sigma^*(g)$.

σ^* est injectif :

$\sigma^*(f) = \sigma^*(g) \Rightarrow \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ g \circ \sigma \Rightarrow f = g$

σ^* est surjectif :

$g \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, d_1) \Rightarrow \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$ car $\sigma \circ g \circ \sigma^{-1}$ est une bijection et $\delta(\sigma \circ g \circ \sigma^{-1}(M), \sigma \circ g \circ \sigma^{-1}(M')) = d_1(g \circ \sigma^{-1}(M), g \circ \sigma^{-1}(M'))$

$= d_1(\sigma^{-1}(M), \sigma^{-1}(M')) = \delta(\sigma \circ \sigma^{-1}(M), \sigma \circ \sigma^{-1}(M')) = \delta(M,M')$.

Montrons que $\mathcal{I}(\mathcal{E}, d_1) = \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$. $\mathcal{I}(\mathcal{E}, d_1) = \sigma^*(\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta))$.

Remarquons que $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$ et $\mathcal{I}(\mathcal{E}, d_1)$ contiennent tous deux les translations (l'image par σ^* d'une translation est une translation) et on avait

$\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta) = G \cup TG$, T ensemble des translations et $TG = \{t \circ g , t \in T, g \in G\}$

donc $\mathcal{I}(\mathcal{E}, d_1) = \sigma^*(G) \cup T\sigma^*(G)$.

$\sigma^*(G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{I}(\mathcal{E}, d_1)$ de cardinal 8 comme G (σ^* est un homomorphisme bijectif de groupes). Déterminons $\sigma^*(r)$ où r est la rotation de centre O et angle $\Pi/2$.

$\sigma^*(r) = \sigma^{-1} \circ r \circ \sigma = (\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma)^{-1} \circ r \circ (\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma)$ car σ est la composée de la rotation de centre O et d'angle $-\Pi/4$ et de l'homothétie de centre O et rapport $\sqrt{2}$, σ et r commutent donc et $\sigma^*(r) = r$. G étant engendré par r et la symétrie s par rapport à AC, $\sigma^*(G)$ est engendré par $\sigma^*(r)$ et $\sigma^*(s)$.

$\sigma^*(s) = \sigma^{-1} \circ s \circ \sigma = (\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma)^{-1} \circ s \circ (\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma) = s_{0x}$. G étant aussi engendré par r et la symétrie s_{0x} par rapport à la droite $y = 0$, on obtient :

$\sigma^*(G) = G$.

$\mathcal{I}(\mathcal{E}, d_1) = G \cup TG = \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$.

TROISIEME PARTIE

3.1. a. Sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \to x^p$ est continue, deux fois dérivable et on a :

$$g''(x) = p(p-1)x^{p-2} \quad ; \quad p > 1 \Rightarrow p(p-1) > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ g''(x) > 0$$

La fonction g est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}_+$ et on a alors :

$$\forall (a,x) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (\alpha,\beta) \in \,]0,1[^2 \quad \alpha + \beta = 1 \ (\alpha a + \beta x)^p < \alpha\, a^p + \beta x^p$$

On a égalité de plus pour $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ et uniquement pour ces valeurs lorsque a et x sont distincts. Si $a = x$ on a égalité dans tous les cas.

3.1. b. L'étude faite en 3.1. a. appliquée à $|x|$, $|x'|$, $|y|$, $|y'|$ nous donne :

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \alpha + \beta = 1 \qquad |x''|^p + |y''|^p \leq 1$$

car on a les inégalités : $|x''|^p \leq \alpha\, |x|^p + \beta\, |x'|^p$ (1) ;
$|y''|^p \leq \alpha\, |y|^p + \beta\, |y'|^p$ (2) .

Dans le cas où il y a égalité, il y a égalité dans chacune des inégalités (1) et (2) c'est-à-dire que l'on a $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$, cas triviaux, ou bien lorsque $|x| = |x'| = |\alpha x + \beta x'| = \alpha\, |x| + \beta\, |x'|$

$|y| = |y'| = |\alpha y + \beta y'| = \alpha\, |y| + \beta\, |y'|$

c'est-à-dire $x = x'$, $y = y'$.

3.1. c. Pour montrer que N_p est une norme sur $\mathbb{R}^2$ nous devons montrer que :

(1) $N_p(\vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = 0$, (2) $\forall\, \vec{u},\ N_p(\vec{u}) \geq 0$

(3) $\forall (\vec{u},\vec{v}),\ N_p(\vec{u}+\vec{v}) < N_p(\vec{u}) + N_p(\vec{v})$, (4) $\forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad N_p(\lambda\vec{u}) = |\lambda| N_p(\vec{u})$

(2) $N_p(\vec{u}) \geq 0$ c'est évident

(4) $N_p(\lambda\vec{u}) = (|\lambda\, x|^p + |\lambda\, y|^p)^{1/p} = \left[|\lambda|^p\, (|x|^p + |y|^p)\right]^{1/p}$

$= |\lambda|\ N_p(\vec{u})$

(1) $N_p(\vec{u}) = 0 \Rightarrow |x|^p + |y|^p = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

(3) $N_p(\vec{u} + \vec{v}) = N_p\left(N_p(\vec{u})\, \dfrac{\vec{u}}{N_p(\vec{u})} + N_p(\vec{v})\, \dfrac{\vec{v}}{N_p(\vec{v})}\right)$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

$= N_p\left[\left(N_p(\vec{u}) + N_p(\vec{v})\right)(\alpha\, \vec{U} + \beta\, \vec{V})\right]$ avec $\alpha+\beta = 1,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$,
$N_p(\vec{U}) = N_p(\vec{V}) = 1$

En utilisant : . $N_p(\lambda\vec{u}) = |\lambda|\ N_p(\vec{u})$ et 3.1.b. on obtient avec

$\lambda = N_p(\vec{u}) + N_p(\vec{v})$.

$$N_p(\vec{u} + \vec{v})^p \leq (N_p(\vec{u}) + N_p(\vec{v}))^p\ (N_p(\alpha\, \vec{U} + \beta\, \vec{V}))^p$$

En utilisant 3.1.b. pour $\vec{U}$, $\vec{V}$, α et β réels positifs, $\alpha + \beta = 1$, $N_p(\alpha \vec{U} + \beta \vec{V})^p \leq 1$, $N_p(\vec{u} + \vec{v})^p \leq [N_p(\vec{u}) + N_p(\vec{v})]^p$, d'où $N_p(\vec{u}+\vec{v}) \leq N_p(\vec{u})+N_p(\vec{v})$ avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{U} = \vec{V}$ c'est-à-dire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ positivement liés $(\vec{u}\, N_p(\vec{v}) = \vec{v}\, N_p(\vec{u}))$.

3.2. Soient M, N et P trois points alignés de $\mathcal{E}$ mais tels que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ soient positivement liés. Soit f un élément de $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$: on sait que f est une bijection.
Montrons que f conserve l'alignement ce qui prouvera que f appartient au groupe affine de $\mathcal{E}$ en utilisant le théorème suivant :

Toute bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ conservant l'alignement est une application affine.

$d_p\left(f(M), f(N)\right) = d_p(M,N)$; $d_p\left(f(N), f(P)\right) = d_p(N,P)$;

$d_p\left(f(M), f(P)\right) = d_p(M,P)$ et $d_p(M,P) = d_p(M,N) + d_p(N,P)$ entraîne

$d_p\left(f(M), f(P)\right) = d_p\left(f(M), f(N)\right) + d_p\left(f(N), f(P)\right)$ et en utilisant 3.1.c, $\overrightarrow{f(M)\,f(N)}$ et $\overrightarrow{f(N)\,f(P)}$ sont positivement liés c'est-à-dire f(M), f(N), f(P) alignés. $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$ est inclus dans le groupe affine ; c'est de toute évidence un groupe.

Toutes les translations appartenant à $\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$ et à $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$ et les parties linéaires des éléments de $\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$ et des éléments de $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$ coïncidant, nous avons montré que

$$\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta) = \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p) .$$

QUATRIEME PARTIE

4.1. $\mathcal{A}$ partie bornée de $\mathcal{E}$.

4.1. a. $A \in \mathcal{A}$. Considérons la suite $(f^p(A))_{p\in\mathbb{N}}$. Cette suite est contenue dans $\mathcal{A}$ donc est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme que toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une valeur d'adhérence c'est-à-dire qu'en particulier la suite $(f^p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente donc de Cauchy

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, p_1 < p_2 \qquad D(f^{p_2}(A), f^{p_1}(A)) < \varepsilon$$

Considérons f^{p_1} ; c'est une expansion de $\mathcal{A}$ et on a donc

$$D\left(f^{p_2 - p_1}(A), A\right) < D\left(f^{p_2}(A), f^{p_1}(A)\right) < \varepsilon$$

c'est-à-dire $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists\, k \in \mathbb{N}^*$ $D(A, f^k(A)) < \varepsilon$.

Pour démontrer la deuxième propriété considérons $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ muni de la distance D' :

$$D'((M,N), (M',N')) = D(M,M') + D(N,N')$$

$\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ est alors muni d'une expansion f' : $f'(M,N) = (f(M),f(N))$.

En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite $(f'^p(A,B))_{p\in\mathbb{N}}$ on obtient :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad D'((A,B), (f^k(A), f^k(B))) < \varepsilon$$

d'où $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad D(A, f^k(A)) < \varepsilon \ , \ D(B, f^k(B)) < \varepsilon$

4.1. b. Reprenons la propriété écrite à la fin de la question 4.1.a.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad D(f(A), f(B)) \leq D(f^k(A), f^k(B))$

$\leq D(f^k(A), A) + D(A,B) + D(B, f^k(B)) \leq 2\varepsilon + D(A,B)$

On a donc : $D(f(A), f(B)) \leq D(A,B)$. L'inégalité inverse provient du fait que f est une expansion de $\mathcal{A}$. Nous avons montré :

$$\forall f \in \operatorname{Exp}(\mathcal{A}, D) \quad D(f(A), f(B)) = D(A,B)$$

Pour montrer que f a une image dense dans $\mathcal{A}$ il suffit de remarquer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad D(A, f^k(A)) < \varepsilon$$

c'est-à-dire en remarquant que $f^k(A) = f\,[f^{k-1}(A)]$

3.3. $f \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p) \Rightarrow$ la partie liénaire g de f conserve la norme N_p. Soit $\mathcal{M}$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\left.\begin{array}{l} N_p(g(\vec{i})) = N_p(\vec{i}) \\ N_p(g(\vec{j})) = N_p(\vec{j}) \end{array}\right\} \Rightarrow |a|^p + |b|^p = |c|^p + |d|^p = 1$$

Ceci entraîne : $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$, $|d| \leq 1$, d'où
$|\det \mathcal{M}| = |ad - bc| \leq 1 + 1 = 2$; $f^{-1} \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p) \Rightarrow |\det \mathcal{M}|^{-1} \leq 2$;
$\forall n \in \mathbb{Z} \quad f^n \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p) \Rightarrow |\det \mathcal{M}|^n \leq 2$. On a donc $|\det \mathcal{M}| = 1$.
$f^{-1} \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$ et sa partie linéaire a pour matrice $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ donc on a
$|d|^p + |b|^p = |c|^p + |a|^p = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} |d|^p + |b|^p = |c|^p + |a|^p = 1 \\ |a|^p + |b|^p = |c|^p + |d|^p = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |a|^p = |d|^p \Rightarrow |b|^p = |c|^p$$

d'où $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$; $d = \varepsilon a \quad \varepsilon \in \{+1, -1\}$; $c = \varepsilon' b \quad \varepsilon' \in \{+1, -1\}$;
$\Rightarrow \det \mathcal{M} = \varepsilon a^2 - \varepsilon' b^2 = \pm 1$
$\varepsilon = -\varepsilon' \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$
$\varepsilon = \varepsilon' \Rightarrow |a^2 - b^2| = 1$ or $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1 \Rightarrow |a^2 - b^2| = 1 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$ et alors $a^2 + b^2 = 1$.
La matrice $\mathcal{M}$ est alors telle que : $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$; $|\det \mathcal{M}| = 1$.

En fait nous avons même obtenu plus :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ b & -\varepsilon a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon \in \{+1, -1\} \ , \quad a^2 + b^2 = 1 \ .$$

Ceci nous montre que $\mathcal{M}$ est une matrice orthogonale.

L'égalité : $a^2 + b^2 = |a|^p + |b|^p = 1$ nous permet d'affirmer que a vaut 0, 1, ou -1. En effet :

$$\left.\begin{array}{lll} |a| < 1 \Rightarrow |a|^p < |a|^2 & \text{pour} & p > 2 \\ |b| < 1 \Rightarrow |b|^p < |b|^2 & \text{pour} & p > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow |a|^p + |b|^p < 1 \ .$$

Nécessairement si $p > 2$ $|a| = 1$ ou $|b| = 1$. Si $|a| = 1$ alors a vaut $+1$ ou -1 et b vaut 0. Si $|b| = 1$, a vaut 0 et b vaut $+1$ ou -1.

Si p est strictement compris entre 1 et 2 :

$$\left.\begin{array}{l} |a| < 1 \Rightarrow a^2 < |a|^p \\ |b| < 1 \Rightarrow b^2 < |b|^p \end{array}\right\} \Rightarrow |a|^p + |b|^p > 1$$

donc nécessairement $|a|$ vaut 1 ou $|b|$ vaut 1. Et on arrive à la même conclusion.

Les parties linéaires des éléments de $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$ pour $p > 1$, $p \neq 2$ sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon' \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\varepsilon, \varepsilon') \in \{+1, -1\}^2$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists B \in \operatorname{Im} f \quad D(A,B) < \varepsilon \ .$$

f application conservant la distance est continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est compact, $f(\mathcal{A})$ est un compact de $\mathcal{A}$.

$f(\mathcal{A})$ dense dans $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\overline{f(\mathcal{A})} = \mathcal{A}$ or $\overline{f(\mathcal{A})} = f(\mathcal{A})$ car $f(\mathcal{A})$ compact donc $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

f expansion de $(\mathcal{A}, D)$ est injective (question 0.1), surjective car $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, conserve D ; c'est donc une isométrie de $(\mathcal{A}, D)$.

$\mathcal{A}$ compact $\Rightarrow$ $\operatorname{Exp}(\mathcal{A}, D) = \mathcal{J}(\mathcal{A}, D)$, l'autre inclusion étant triviale.

4.2. a. Soit : A appartient à $\bar{\mathcal{A}}$. Il existe une suite de Cauchy $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ ayant pour limite A. La suite $(f(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est encore une suite de Cauchy, f conservant la distance (question 4.1.b). Définissons $\bar{f}(A)$ comme la limite de la suite $(f(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$. Par construction $\bar{f}(A)$ dépend de la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ choisie mais en fait il n'en est rien : si $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(A'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergeant vers A posons $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par : $B_{2n} = A_n$; $B_{2n+1} = A'_n$.

Alors la suite $(f(B_p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers la limite de $(f(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ et la limite de $(f(A'_p))_{p\in\mathbb{N}}$.

$\bar{f}$ par construction préserve la distance D . Déterminons l'image de $\bar{f}$; l'image de $\bar{f}$ est dense dans $\bar{\mathcal{A}}$ or $\bar{f}$ étant continue de $\bar{\mathcal{A}}$ dans $\bar{\mathcal{A}}$, $\bar{\mathcal{A}}$ étant compact (partie fermée bornée) $\bar{f}(\bar{\mathcal{A}})$ est un compact dense de $\bar{\mathcal{A}}$, c'est donc $\bar{\mathcal{A}}$. Nous avons donc montré que $\bar{f}$ appartient à $\mathcal{J}(\bar{\mathcal{A}}, D)$.

4.2. b. Pour montrer que $Exp(\mathcal{A}, D) = \mathcal{J}(\mathcal{A}, D)$ il suffit de montrer que, tout élément de $Exp(\mathcal{A}, D)$ étant injectif et isométrique,

$\forall f \in Exp(\mathcal{A}, D) \quad f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$

Pour cela, étant donné que $\bar{f}_{/\mathcal{A}} = f$; $\bar{f}(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{\mathcal{A}}$; $\bar{\mathcal{A}} = (\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}) \cup \mathcal{A}$, nous allons montrer que $\bar{f}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}) = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{f}^{-1} \in \mathcal{J}(\bar{\mathcal{A}}, D)\\ f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{f}^{-1}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}) \subset \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}.$$

En effet, $\bar{f}^{-1} \in \mathcal{J}(\bar{\mathcal{A}}, D) \Rightarrow \forall A \in \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$, $\bar{f}^{-1}(A) \in \bar{\mathcal{A}}$; si $\bar{f}^{-1}(A)$ n'appartient pas à $\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$ alors $\exists B \in \mathcal{A}$, $\bar{f}^{-1}(A) = B \Rightarrow A = \bar{f}(\bar{f}^{-1}(A)) = f(B) = \bar{f}(B) \in \mathcal{A}$ contradiction. On a donc la conclusion.

$\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}} \cap {}^c\mathcal{A}$ est un fermé comme intersection de fermés car $\mathcal{A}$ est ouvert. $\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$ est un fermé borné donc un compact. ALors utilisons 4.1.b.

$\bar{f}^{-1}{}_{/\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}} \in \mathcal{J}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}, D)$

En particulier $\bar{f}^{-1}$ est une bijection de $\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$ sur lui-même c'est-à-dire

$\bar{f}^{-1}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}) = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$.

4.3. a. $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ $D(x,y) = |x - y|$ $\mathcal{A} =]0, +\infty[$, et f l'expansion de $(\mathcal{A}, D)$ définie par $x \to x + 1$. Alors f conserve D mais n'est pas une isométrie de $(\mathcal{A}, D)$ car $f(\mathcal{A}) =]1, +\infty[\subsetneq \mathcal{A}$.

4.3. b. Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne et $\mathcal{A} = \{(\cos\theta, \sin\theta), \theta\in\mathbb{N}\}$. $\mathcal{A}$ est bornée. Soit f la rotation de centre 0 et d'angle 1 radian ; f conserve la distance. $f(\mathcal{A}) \subsetneq \mathcal{A}$ car $(1,0) \notin f(\mathcal{A})$.
$(1,0) \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists\, \theta \in \mathbb{N}\ \ e^{i(\theta+1)} = 1 \Rightarrow \exists\, \theta\in\mathbb{N}\ \ \theta + 1 \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \pi$ rationnel, ce qui n'est pas.